テイラーの定理の証明

定理 0.1 (テイラーの定理)**.** $y = f(x)$ を $[a, b]$ で連続、(a, b) で $n+1$ 回微分可能な関数とする。このとき、

$$\forall h \in (a, b), \forall x \in (a, b), \exists \theta \in (0, 1),$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(h)(x-h)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(h + \theta(x-h))(x-h)^{n+1}$$

が成り立つ。

(但し $(x-h)^0 \equiv 1$ とする。また $\exists \theta \in (0, 1), \forall x \in (a, b)$ でないことに注意)

証明. 剰余項を $R_{n+1} = \varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(h)(x-h)^k$ とおく。すると、

$$\forall r \leq n,$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(r)}(x) &= f^{(r)}(x) - \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(h) \frac{k!}{(k-r)!}(x-h)^{k-r} \\ &= f^{(r)}(x) - \sum_{k=r}^{n} \frac{f^{(k)}(h)}{(k-r)!}(x-h)^{k-r} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \varphi^{(r)}(h) &= f^{(r)}(h) - \sum_{k=r}^{n} \frac{f^{(k)}(h)}{(k-r)!}(h-h)^{k-r} \\ &= f^{(r)}(h) - \frac{f^{(r)}(h)}{(r-r)!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

また、$\Psi(x) = (x-h)^{n+1}$ と置くと、

$$\Psi^{(r)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!}(x-h)^{n+1-r}$$

より、$\Psi^{(r)}(h) = 0$ となる。今、任意の $x \in (a, b), (x \neq h)$ に対して、
$\Psi^{(r)}(x) \neq 0, (r \leq n+1)$ だから、コーシーの平均値定理より、

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)} &= \frac{\varphi(x) - \varphi(h)}{\Psi(x) - \Psi(h)} \\ &= \frac{\varphi^{(1)}(h + \theta_1(x-h))}{\Psi^{(1)}(h + \theta_1(x-h))} \\ &= \frac{\varphi^{(1)}(h + \theta_1(x-h)) - \varphi^{(1)}(h)}{\Psi^{(1)}(h + \theta_1(x-h)) - \Psi^{(1)}(h)} \\ &\cdots \\ &= \frac{\varphi^{(n+1)}(h + \theta_{n+1}(x-h))}{\Psi^{(n+1)}(h + \theta_{n+1}(x-h))} \end{aligned}$$

なる、$\theta_1, \cdots, \theta_{n+1} \in (0, 1)$ が存在する。よって、

$$\begin{aligned}\frac{R_{n+1}}{(x-h)^{n+1}} &= \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}\\ &= \frac{\varphi^{(n+1)}(h+\theta_{n+1}(x-h))}{\Psi^{(n+1)}(h+\theta_{n+1}(x-h))}\\ &= \frac{f^{(n+1)}(h+\theta_{n+1}(x-h))}{(n+1)!}\end{aligned}$$

よって、

$$R_{n+1} = f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(h)(x-h)^k \tag{1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(h+\theta_{n+1}(x-h)) \tag{2}$$

これは、R_{n+1} を (1) のように定義できて、それは、(2) と等しいことを意味する。よって、

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(h)(x-h)^k+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(h+\theta(x-h))(x-h)^{n+1}$$

が示された。 □